RODOLFO GUIDOBONO	CURSO DE MECÁNICA TEÓRICA J.GARCÍA - EJERCICIO CAP. 43	HOJA Nº 1 FECHA 6/12/19

Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\, dz = -\frac{\pi}{b} i\, e^{-ib|a|}$

$$\operatorname{Res}_{(f(z),z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

Nuestra función $f(z)$ tiene 2 polos de orden 1 $\longrightarrow f(z) = \dfrac{e^{-iaz}}{(z-z_1)(z-z_2)}$

$z^2-b^2+i\varepsilon = (z-z_1)(z-z_2) = z^2-(z_1+z_2)z + z_1 z_2$

Para que se cumpla la igualdad debe ser =

$$\begin{cases} z_1+z_2 = 0 \\ z_1 z_2 = -b^2+i\varepsilon \end{cases} \quad \text{donde } \varepsilon << 0 \text{ tal que } \varepsilon^2 \approx 0$$

z_1 es un número complejo $z_1 = \alpha + i\beta$

entonces $z_2 = -\alpha - i\beta$

$z_1 z_2 = -(\alpha+i\beta)^2 = -(\alpha^2-\beta^2+2\alpha i\beta)$

$-b^2+i\varepsilon = -(\alpha^2-\beta^2) - i(2\alpha\beta)$

esta igualdad es entre 2 números complejos, por lo tanto

$$\begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = b^2 \\ \varepsilon = -2\alpha\beta \end{cases} \longrightarrow \alpha = -\frac{\varepsilon}{2\beta} \qquad \alpha^2 = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{\beta^2}$$

$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 = b^2$ haciendo $\beta = A$ $\quad \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \frac{1}{A} - A = b^2$

$A^2 + b^2 A - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 0$ pero $\varepsilon^2 \approx 0 \Rightarrow A(A+b^2) = 0$

$A = -b^2$

$\beta^2 = -b^2 \Rightarrow \beta = ib \qquad \alpha = -\dfrac{\varepsilon}{2ib} = i\dfrac{\varepsilon}{2b}$

$z_1 = -\dfrac{\varepsilon}{2ib} + i(ib) = \dfrac{\varepsilon}{2b} i - b$

$z_1 = -b + i\dfrac{1}{2b}\varepsilon \qquad z_2 = b - i\dfrac{1}{2b}\varepsilon$

NOTA

		HOJA Nº 2
		FECHA

Calculamos los residuos

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{e^{-iaz}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{e^{-iaz_1}}{z_1 - z_2}$$

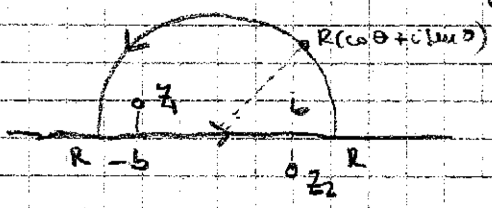
$$\operatorname{Res}(f(z), z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) \frac{e^{-iaz}}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

$$= \frac{e^{-iaz_2}}{z_2 - z_1}$$

$$z_1 - z_2 = -2b + 2i \frac{1}{2b} \varepsilon$$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

$$\oint f(z)\, dz = i 2\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), z_i)$$



$$\oint f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(z)\, dz + \int_{\frown} f(z)\, dz$$

$$\int_{\frown} \frac{e^{-iaz}}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = \int_{\frown} \frac{e^{-iaR\cos\theta}\, e^{-iaRi\,\mathrm{sen}\,\theta}}{(z - z_1)(z - z_2)} dz = \int_{\frown} \frac{e^{-iaR\cos\theta}\, e^{aR\,\mathrm{sen}\,\theta}}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$$

$$\left| e^{-iaR\cos\theta} \right| = 1$$

para que la integral tienda a cero cuando $R \to \infty$ debe cumplirse que

$a < 0$ ya que en este camino $\mathrm{sen}\,\theta > 0$

Es decir que si $a < 0 \Rightarrow \lim_{R \to \infty} \int_{\frown} f(z)\, dz = 0$

$$\oint f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2 - b^2 + i\varepsilon} dz = i 2\pi \sum \operatorname{Res}.$$

siendo z_1 el único polo

NOTA

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = i2\pi \frac{e^{-iaz_1}}{z_1-z_2} = i2\pi \frac{e^{-ia(-b+i\frac{1}{2b}\varepsilon)}}{-2b+2i\frac{1}{2b}\varepsilon}$$

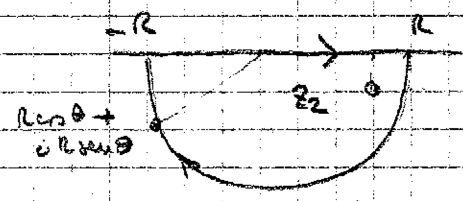
en el límite $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = i2\pi \frac{e^{iab}}{-2b} = -\frac{\pi}{b} i e^{iab}$$

Para $a<0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = -\frac{\pi}{b} i e^{iab} = -\frac{\pi}{b} i e^{-i|a|b}$$

Para $a>0$ la integral $\int_{\frown}$ no converge - Hacemos el siguiente camino



$$\oint f(z)\,dz = -i2\pi \, \mathrm{Res}(f(z), z_2)$$

$$\int_{\cup} \frac{e^{-iaR\cos\theta}\, e^{aR\sin\theta}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{si } a>0 \text{ ya que } \sin\theta<0$$

$$\oint f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = -i2\pi \frac{e^{-iaz_2}}{2b-2i\frac{1}{2b}\varepsilon}$$

$$= -i2\pi \frac{e^{-ia(b-i\frac{1}{2b})\varepsilon}}{2b-2i\frac{1}{2b}\varepsilon}$$

en el límite $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = -i2\pi \frac{e^{-iab}}{2b}$$

Para $a>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iaz}}{z^2-b^2+i\varepsilon}\,dz = -\pi i \frac{e^{-iab}}{b} = -\frac{\pi}{b} i e^{-i|a|b}$$

NOTA